

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория представлений групп
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

Аннотация

Курс направлен на изучение основных результатов теории представлений, относящихся прежде всего к конечным и компактным группам. Теория представлений является одним из наиболее развитых разделов современной математической физики. Основы её были заложены ещё в начале прошлого века, и, начиная с 20-х годов, она отмечена тесными связями с теорией симметрий в квантовой физике. Говоря образно, теория представлений - это попытка обнаружить и описать на математическом языке симметрию в природе. От слушателей предполагается знание линейной алгебры, желательно знать базовые понятия теории групп, все остальные необходимые сведения будут рассказаны на лекциях.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение основных современных методов теории представлений.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории представлений;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории представлений;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории представлений.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории представлений;
- современные проблемы соответствующих разделов теории представлений;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории представлений;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории представлений.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Группа	2	2		6
2	Действия групп на множестве	2	2		6
3	Напоминание из линейной алгебры: проектор и его свойства	2	2		6
4	Связь между представлениями над \mathbb{C} и \mathbb{R}	2	2		6
5	Лемма Шура	2	2		6
6	Характеры. Определение и простейшие свойства.	2	2		6
7	Ортогональность характеров	4	4		8
8	Группа Ли	2	2		6
9	Алгебра Ли	4	4		8
10	Описание неприводимого представления $sl_2(\mathbb{C})$	4	4		8
11	Компактные группы	4	4		9
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Группа

Определение и простейшие свойства. Подгруппа. Конечная группа. Определение порядка элемента. Примеры групп: поля и группы преобразований множества. Группа перестановок S_n . Изоморфизм групп и его свойства.

2. Действия групп на множестве

Определение представления группы. Изоморфизм представлений групп. Инвариантные подпространства. Подпредставления. Неприводимые представления. Примеры: тривиальное представление, представление S_n перестановками базисных векторов.

3. Напоминание из линейной алгебры: проектор и его свойства

Сплетающие операторы представления. Вполне приводимость представлений конечной группы. Разложение представления на неприводимые. Теорема о единственности разложения.

4. Связь между представлениями над \mathbb{C} и \mathbb{R}

Комплексификация и о вещественности представления. Вопрос о неприводимости.

5. Лемма Шура

Одномерные представления. Описание неприводимых представлений абелевой группы. Описание представлений S_3 .

6. Характеры. Определение и простейшие свойства.

Классы сопряжённости. Эрмитова метрика на $\text{Class}(G)$.

7. Ортогональность характеров

Следствия. Формула Бернсайда. Равенство количества неприводимых представлений и количества классов сопряжённых элементов. Описание представлений S_4 , S_5 и таблица характеров.

8. Группа Ли

Определение. Примеры — GL_n , SL_n , SO_n , SU_n . Гомоморфизм групп Ли. Представление групп Ли.

9. Алгебра Ли

Определение. Связь с группой Ли. Гомоморфизм алгебр Ли. Представление алгебры Ли. Связь между гомоморфизмом групп Ли и гомоморфизмом алгебр Ли. Экспоненциальное отображение. Связь представлений группы Ли и её касательной алгебры Ли.

10. Описание неприводимого представления $sl_2(\mathbb{C})$

Доказательство единственности неприводимого представления данной размерности.

11. Компактные группы

Вполне приводимость компактных групп Ли. Вещественная форма группы Ли.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы алгебры и теории представлений [Текст] / И. А. Чубаров ; М-во высш. и сред. спец. образов. РСФСР, Моск. физ.-техн. ин-т - М.Изд-во МФТИ, 1984
2. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ, 2016

Дополнительная литература

1. Специальные функции и теория представлений групп [Текст]/Н. Я. Виленкин, -М., Наука, 1965

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;
- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Математика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория представлений групп» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории представлений;
- современные проблемы соответствующих разделов теории представлений;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории представлений;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории представлений.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

1. Группа. Определение и простейшие свойства. Подгруппа. Конечная группа. Определение порядка элемента.
2. Действия групп на множестве. Определение представления группы. Изоморфизм представлений групп. Инвариантные подпространства. Подпредставления.
3. Теорема о единственности разложения.
4. Комплексификация и овеествление представления. Вопрос о неприводимости.
5. Лемма Шура. Одномерные представления. Описание неприводимых представлений абелевой группы.
6. Характеры. Определение и простейшие свойства. Классы сопряжённости.

7. Ортогональность характеров. Следствия. Формула Бернсайда. Равенство количества неприводимых представлений и количества классов сопряжённых элементов.
8. Группа Ли. Представление групп Ли.
9. Алгебра Ли. Определение. Связь с группой Ли.
10. Гомоморфизм алгебр Ли. Представление алгебры Ли.
11. Связь между гомоморфизмом групп Ли и гомоморфизмом алгебр Ли. Экспоненциальное отображение. Связь представлений группы Ли и её касательной алгебры Ли.
12. Компактные группы. Приводимость компактных групп Ли.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы представлены в прикреплённом файле.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Зачёт на удовл (3-4).

Вопросы на 3 Задача

1. Опишите неприводимые представления Z_m .

Задача 2. Опишите таблицу характеров группы A_4

Задача 3. Найдите c_Λ для произвольной таблицы, форма которой имеет вид а) (n) ; б) $(1, 1, \dots, 1)$; в) $(n-1, 1)$.

Задача 4. Какая пара таблиц RSK -соответствует перестановке 621345 ?

Задача 5. Опишите $T_e(SO_n)$.

Вопросы на 4

Задача 6. Пусть $G : U$ — представление, U^G — множество G -инвариантных векторов. Тогда U^G — линейное

пространство и $\dim U^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g)$.

Задача 7. Предположим, что $\chi_V \in \mathbb{R}$ для некоторого комплексного представления $G : V$. Тогда имеется невырожденная G -инвариантная билинейная форма $B(\cdot, \cdot)$ на пространстве V , которая является либо симметрической, либо кососимметрической.

Задача 8. Пусть $W \subset CG$ — CG -инвариантное подпространство. Тогда найдется вектор $\omega \in W$ такой, что

а) $W = CG \cdot \omega$; б) для любого $x \in W$ выполнено равенство $x \cdot \omega = x$;

Задача 9. Опишите M^λ и S^λ для диаграмм формы а) (n) ; б) $(1, 1, \dots, 1)$; в) $(n-1, 1)$.

Задача 10. Покажите, что в любом представлении $sl_2(\mathbb{C})$ оператор h будет диагонализуем.

Вопросы на 5

Задача 11. Докажите, что любое неприводимое представление абелевой группы одномерно.

Задача 12. Пусть представление $G : V$ неприводимо, а представление $G : V(\mathbb{C})$ приводимо. Тогда V чётномерно, а $V(\mathbb{C})$ представляется в виде прямой суммы двух изоморфных неприводимых инвариантных подпространств.

Задача 13. Связная группа G порождается любой окрестностью единицы.

Вопросы на 6

Задача 14. Количество неприводимых представлений равно количеству классов сопряжённости.

Задача 15. Пусть $x \in CS_n$ и для любых $p \in R_\Lambda$, $q \in C_\Lambda$ выполнено равенство $px(\text{sgn}(q)q) = x$. Тогда $x = \alpha c_\Lambda$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

Задача 16. Опишите операцию, обратную операции вставки и докажите её корректность.

Вопросы на 7

Задача 17. Найдите размерности неприводимых представлений A_5 .

Задача 18. Алгебра CG изоморфна алгебре $\bigoplus L(W_i)$, где сумма справа идёт по неприводимым представлениям W_i группы G .

Задача 19. Если диаграмма λ не является строго доминирующей диаграмму μ , то для таблицы T формы

$$\begin{aligned} \mu = \lambda \quad & \text{при } \mu = \lambda, \\ \mu \neq \lambda \quad & \text{при } \mu \neq \lambda. \end{aligned}$$

Задача 20. Докажите, что в любом представлении $sl_2(\mathbb{C})$ найдётся старший вектор.

Вопросы на 8

Задача 21. Строки таблицы характеров ортогональны друг другу. А именно, а) выполнена следующая формула:

$$\sum_g \overline{\chi(g)} \chi(g) = \frac{|G|}{c(g)},$$

где сумма берётся по всем неприводимым представлениям, а $c(g)$ — число элементов в классе сопряжённости g .

б) Если g и h не сопряжены друг другу, то $\int \chi(g)\chi(h) = 0$.

Задача 22. Представления CS_{nCL} и CS_{nCM} изоморфны друг другу тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu$. Задача 23. Модуль Шпехта S^λ изоморфен представлению $CS_n \cdot c_\lambda$.

Задача 24. Описать все неприводимые представления группы D_{12} .

Вопросы на 9-10

Задача 25. Опишите все неприводимые вещественные представления S_4 .

Задача 26. Размерность неприводимого представления G делит её порядок. Пусть χ_V — характер представления $G: V$.

Указание. В этой задаче нужно будет воспользоваться свойствами алгебраических целых чисел.

Задача 27. Пусть G — конечная неабелева простая группа, V — её нетривиальное неприводимое представление. Тогда $\dim V > 2$.

Указание. Можно пользоваться результатом предыдущей задачи б/д.

Задача 28. Пусть $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) : \text{ad}$ — присоединённое представление $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Найдите разложение на неприводимые представления $\text{ad} \otimes \text{ad}$.

Задача 29. Покажите, что $SO_4(\mathbb{R}) \cong S^3 \times S^3 / \{(\pm 1, \pm 1)\}$.

Задача 30. Покажите, что $SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \cong S^n$. Выведите отсюда связность $SO_n(\mathbb{R})$. Будет ли SO_n односвязной?